SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

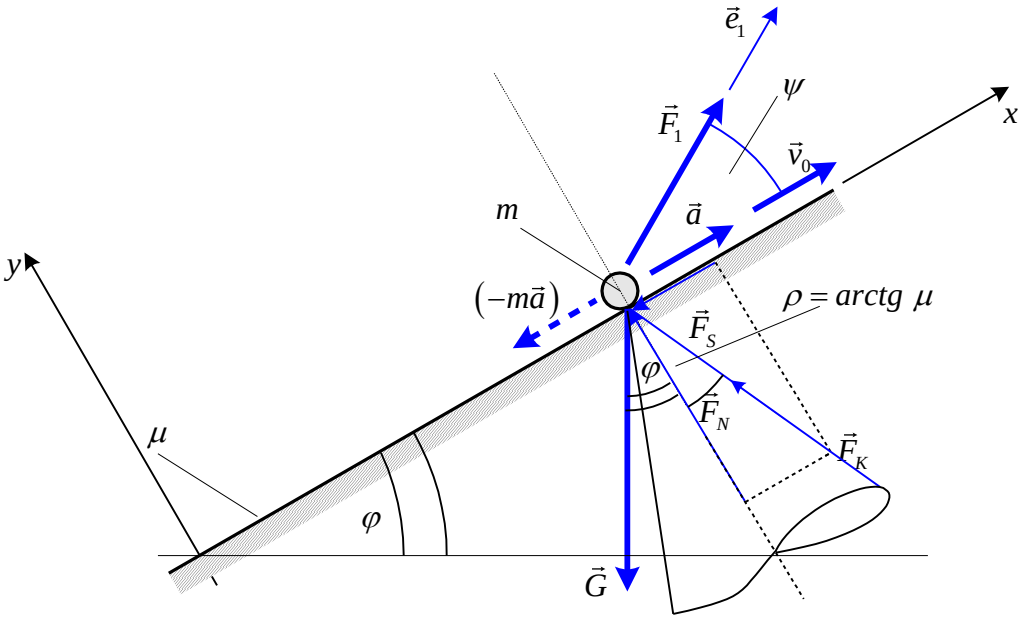
ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

7. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Németh Imre óraadó tanár, Bojtár Gergely egyetemi ts., Szüle Veronika, egy. ts.)

Tömegpont mozgása kényszerpályán

7/1. feladat: Tömegpont mozgása kényszerpályán



Adott:

$\varphi = \psi = 30^\circ,\ \ m = 10\ \text{kg},\ \ \vec{v}_0 = \left(8\,\vec{i}\right)\dfrac{\text{m}}{\text{s}},\ \ \mu = 0,2.$

Feladat:

a) Mekkora F_1 erő esetén marad a tömegpont a kényszerpályán?

b) Határozza meg a tömegpont gyorsulását!

a) A tömegpont gyorsulása: $\vec{a} = a\,\vec{i}$

$\vec{F}_1 = F_1\,\vec{e}_1$; ahol $\vec{e}_1 = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$

$\vec{G} = m\,\vec{g} = m\left(-g\sin\varphi\,\vec{i} - g\cos\varphi\,\vec{j}\right)$

$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(-\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right)$

Impulzus tétel:

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

$\vec{F} + \left(-m\,\vec{a}\right) = \vec{0}$

$\vec{F}_1 + \vec{G} + \vec{F}_K + \left(-m\,\vec{a}\right) = \vec{0}$

$F_1\left(\cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}\right) + m\,g\left(-\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j}\right) + \left(-\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right) + \left(-m\,\vec{a}\,\vec{i}\right) = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i}\ \ /\cdot\vec{j}$

$F_1\cos\psi - m\,g\sin\varphi - \mu F_N - m\,a = 0 \qquad F_1\sin\psi - m\,g\cos\varphi + F_N = 0$

$m\,a = F_1\cos\psi - m\,g\sin\varphi - \mu F_N \quad \Leftarrow \quad F_N = m\,g\cos\varphi - F_1\sin\psi$

$$m\,a = F_1 \cos\psi - m\,g \sin\varphi - \mu\left(m\,g\cos\varphi - F_1 \sin\psi\right)$$

a) $F_N = m\,g\cos\varphi - F_1 \sin\psi \geq 0$ kényszerpályán való maradás feltétele alapján

$$F_1 \leq \frac{m\,g\cos\varphi}{\sin\psi} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0{,}866}{0{,}5} = 173{,}2\ \text{N}$$

b) A tömegpont gyorsulása: $\vec{a} = a\,\vec{i}$

$$m\,a = F_1 \cos\psi - m\,g \sin\varphi - \mu\left(m\,g\cos\varphi - F_1 \sin\psi\right)$$

$$m\,a = F_1\left(\cos\psi + \mu\sin\psi\right) - m\,g\left(\sin\varphi + \mu\cos\varphi\right)$$

$$a = \frac{F_1}{m}\left(\cos\psi + \mu\sin\psi\right) - g\left(\sin\varphi + \mu\cos\varphi\right)$$

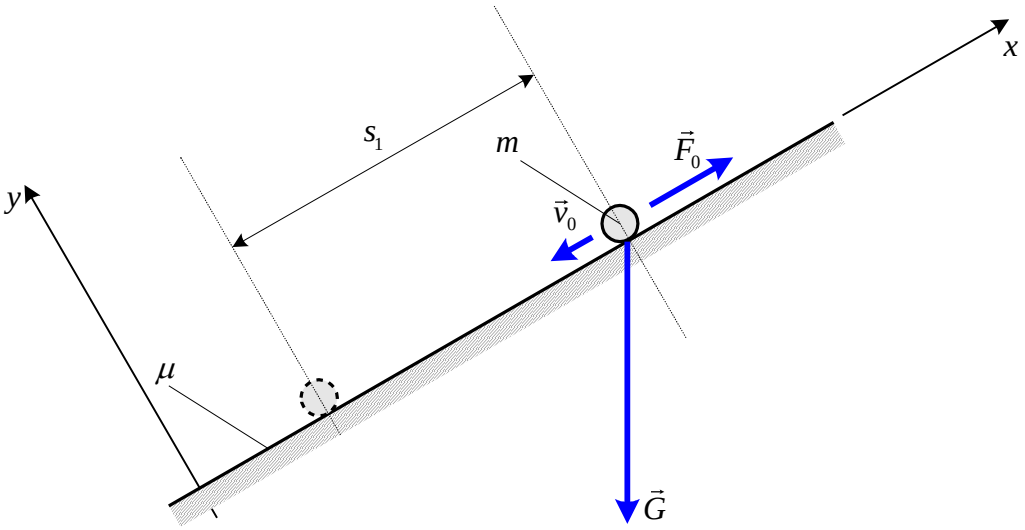
A tömegpont gyorsulása az elemelkedés (pályaelhagyás) határhelyzetében:

$$a = \frac{173{,}2}{10}\left(0{,}866 + 0{,}2 \cdot 0{,}5\right) - 10\left(0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}866\right) = 16{,}73 - 6{,}73 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a \cong g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a} = \left(10\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7/2. feladat: Tömegpont mozgása kényszerpályán



Adott:

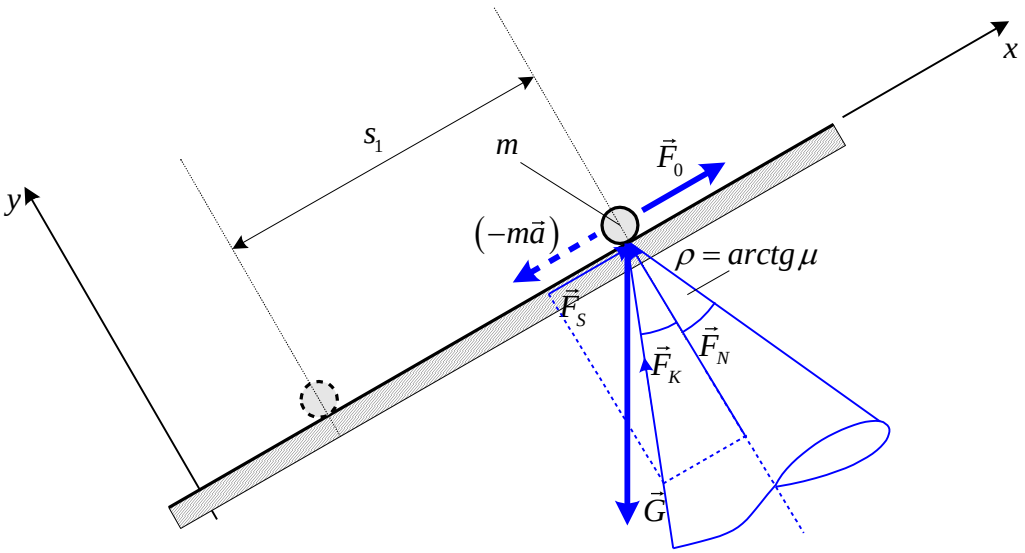
$\vec{G} = \left(-30\,\vec{i} - 40\,\vec{j}\right)\mathrm{N},$

$s_1 = 5\,\mathrm{m},\ \ \vec{v}_0 = \left(-10\,\vec{i}\right)\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ \ \mu = 0{,}15,.$

Feladat:

a) Az indulási helyzetben mekkora a tömegpont gyorsulása $\left(\vec{a} = ?\right)$, ha $\vec{F}_0 = \left(100\,\vec{i}\right)\mathrm{N}$?

b) Határozza meg az $\vec{F}_0$ vektornak azt az értékét, mely esetén a tömegpont s_1 út megtétele után megáll, $\vec{F}_0 = ?$



$\vec{F}_0 = F\,\vec{i}$

$\vec{G} = m\,\vec{g} = \vec{G}_x + \vec{G}_y = \left(-30\,\vec{i} - 40\,\vec{j}\right)\mathrm{N},\left|\vec{G}\right| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50\ \mathrm{N}$

$m = \dfrac{\left|\vec{G}\right|}{\left|\vec{g}\right|} = \dfrac{50}{10} = 5\ \mathrm{kg}$

$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = \left(\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right)$

a) Impulzus tétel:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F} + \left(-m\,\vec{a}\right) = \vec{0}$$

$$\underbrace{\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K}_{\vec{F}} + \left(-m\,\vec{a}\right) = \vec{0}$$

$$F_0\,\vec{i} + \left(-G_x\vec{i} - G_y\vec{j}\right) + \left(\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right) + \left(-m\,\vec{a}\,\vec{i}\right) = \vec{0} \quad /\vec{i} \quad /\vec{j}$$

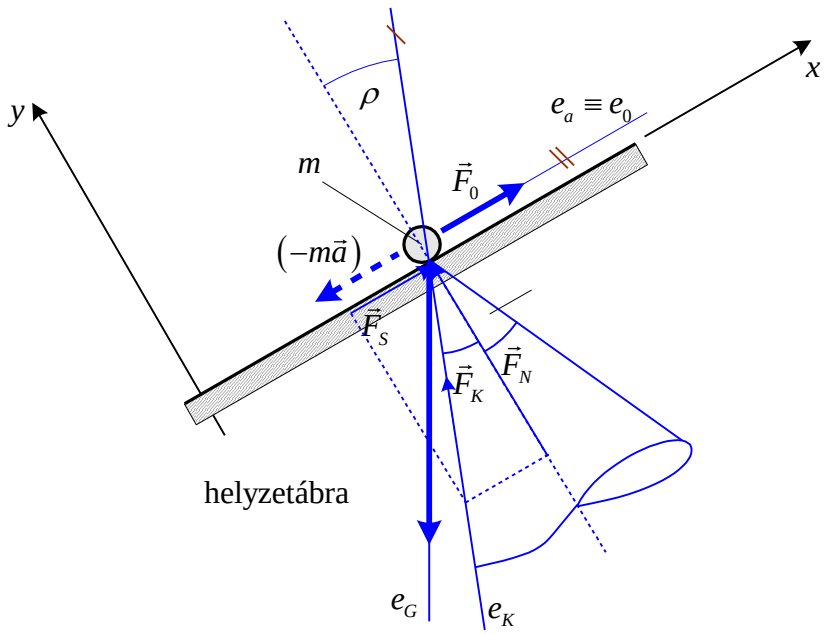
$$F_0 - G_x + \mu F_N - m\,a = 0 \qquad\qquad -G_y + F_N = 0$$

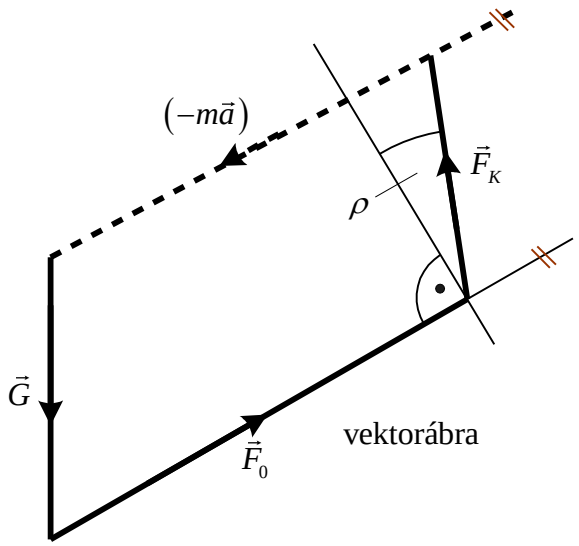
$$m\,a = F_0 - G_x + \mu\,G_y \qquad \Leftarrow \qquad F_N = G_y = 40\ \mathrm{N}$$

$$a = \frac{1}{m}\left(F_0 - G_x + \mu\,G_y\right) = \frac{1}{5}\left(100 - 30 + 0{,}15\cdot 40\right) = 15{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

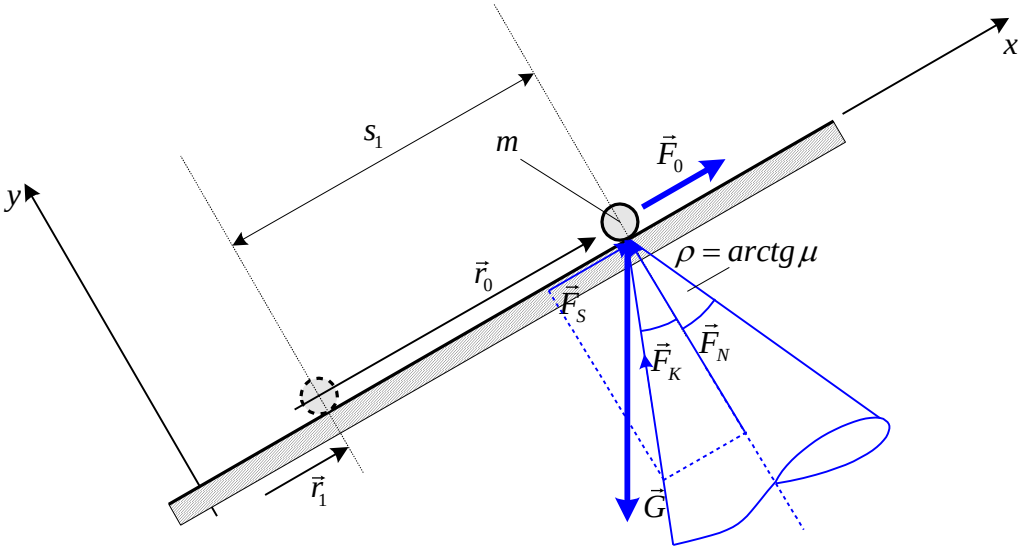
$$\vec{a} = \left(15{,}2\,\vec{i}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Szerkesztés: $\vec{G} + \vec{F}_0 + \vec{F}_K + \left(-m\,\vec{a}\right) = \vec{0}$





b) Az $\vec{F}_0$ meghatározása:



$$t_0 = 0s \quad (\text{indulás}),\ \vec{v}_0 = \left(-10\,\vec{i}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}},\ \vec{r}_0 = \left(x_0\vec{i}\right)\text{m},$$

$$t_1 \quad (\text{megállás}),\ \vec{v}_1 = \left(\vec{0}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}},\ \vec{r}_1 = \left(x_1\vec{i}\right)\text{m},$$

Tömegpontra ható erők eredője:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K = F_0\,\vec{i} + \left(-G_x\vec{i} - G_y\vec{j}\right) + \left(\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right)$$

Munkatétel integrál alakja:

$$E_1 - E_0 = W_{10} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} 1\,d\vec{r} = \vec{F}\cdot\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right) = \vec{F}\cdot\left(-s_1\vec{i}\right)$$

$$\frac{1}{2}m\underbrace{v_1^2}_{=0} - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = \left[F_0\,\vec{i} + \left(-G_x\vec{i} - G_y\vec{j}\right) + \left(\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right)\right]\cdot\left(-s_1\,\vec{i}\right)$$

$$-\frac{1}{2}m\,v_0^2 = \left[F_0\,\vec{i} + \left(-G_x\vec{i} - G_y\vec{j}\right) + \left(\mu F_N\,\vec{i} + F_N\,\vec{j}\right)\right]\cdot\left(-s_1\,\vec{i}\right)$$

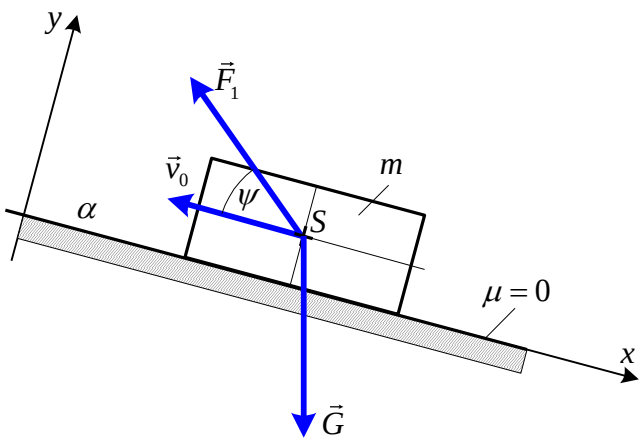
$$-\frac{1}{2}m\,v_0^2 = -F_0 s_1 + G_x s_1 - \mu F_N s_1, \qquad F_N = G_y$$

$$F_0 = \frac{1}{s_1}\left(G_x s_1 - \mu F_N s_1 + \frac{1}{2}m\,v_0^2\right) = G_x - \mu\,G_y + \frac{1}{2s_1}mv_0^2$$

$$F_0 = 30 - 0{,}15\cdot 40 + \frac{1}{2\cdot 5}5\cdot 10^2 = 30 - 6 + 50 = 74\ \text{N}$$

$$\vec{F}_0 = \left(74\,\vec{i}\right)\text{N}$$

7/3. feladat: Tömegpont mozgása sima lejtőn



Adott: az α jelű sima kényszerpályán csúszó $\vec{G}$ súlyú hasáb, amelynek kezdősebessége $\vec{v}_0$.

$\vec{G} = \left(60\,\vec{i} - 80\,\vec{j}\right)\mathrm{N}$

$\mu = 0$

$tg\psi = 0,4$

$g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Feladat:

a) Mekkora $\vec{F}_1$ erő esetén mozoghat a test állandó sebességgel?

b) Mekkora a test $\vec{a}$ gyorsulása és az $\vec{F}_\alpha$ kényszererő, ha $\vec{F}_1 = \left(-85\,\vec{i} + 34\,\vec{j}\right)\mathrm{N}$?

c) Mekkora $\vec{F}_{1\max}$ erő esetén szűnik meg a test és a lejtő közötti kapcsolat?

a) Impulzus tétel: $m\,\vec{a} = \vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_\alpha$,

ahol $\vec{G} = G_x\vec{i} + G_y\vec{j}$, $\vec{F}_\alpha = N_\alpha\vec{j}$,

$\vec{F}_1 = \left(-F_1\cos\psi\,\vec{i} + F_1\sin\psi\,\vec{j}\right) = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$.

Állandó sebességű mozgás: $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\vec{0} = \left(60\,\vec{i} - 80\vec{j}\right) + F_1\left(-\cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}\right) + N_\alpha\vec{j} \qquad /\cdot\vec{i}$$

$$0 = 60 - F_1\cos\psi = G_x - F_{1x} \Rightarrow F_{1x} = -G_x = -60\ \mathrm{N}$$

$$tg\,\psi = \frac{|F_{1y}|}{|F_{1x}|} \Rightarrow F_{1y} = |F_{1x}|\,tg\,\psi = 60\cdot 0,4 = 24\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_1 = \left(-60\,\vec{i} + 24\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

b) Impulzus tétel: $m\,\vec{a} = \vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_\alpha$,

$$m\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\right) = \left(G_x\vec{i} + G_y\vec{j}\right) + \left(F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}\right) + \left(N_\alpha\vec{j}\right) \qquad /\cdot\vec{i} \quad /\cdot\vec{j}$$

$$ma_x = G_x + F_{1x} \Rightarrow a_x = \frac{G_x + F_{1x}}{m} = \frac{60-85}{10} = -2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$m\underbrace{a_y}_{=0} = G_y + F_{1y} + N_\alpha \Rightarrow N_\alpha = -G_y - F_{1y} = 80 - 34 = 46\ \mathrm{N}$$

$$\vec{a} = \left(-2,5\,\vec{i}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad \vec{F}_\alpha = \left(46\,\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

c) Az elválás feltétele: $N_\alpha = -G_y - F_{1y} \le 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1y} \ge -G_y = 80\ \mathrm{N}$,

$$|F_{1\max}| = \frac{|F_{1y}|}{tg\psi} = \frac{80}{0,4} = 200\ \mathrm{N} \qquad \vec{F}_{1\max} = \left(-200\vec{i} + 80\vec{j}\right)\mathrm{N}.$$